Автоматика и телемеханика, № 9, 2024

Управление в социально-экономических системах

© 2024 г. **Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru),**
Д.Г. АЛГАЗИНА, канд. техн. наук (darya.algazina@mail.ru)
(Алтайский государственный университет, Барнаул)

АГРЕГИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ РЕФЛЕКСИВНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО

Рассматривается модель олигополии с произвольным числом агентов, рефлексирующих по Курно в условиях неполной информации, для классического случая линейных функций издержек и спроса. Агенты принимают решения, основываясь на модели коллективного поведения. В исследовании проблемы выявления условий сходимости к равновесию этой модели акцент сделан на траектории суммы невязок действий всех агентов. Получены агрегированные оценки динамики этой траектории, позволяющие судить о движении к положению равновесия траектории каждого из агентов.

Ключевые слова: олигополия Курно, рефлексивное поведение, невязки, агрегированные оценки, условия сходимости.

DOI: 10.31857/S0005231024090079, **EDN:** ZQONUI

1. Введение

Научные направления, в рамках которых исследуются модели поведения рациональных агентов в условиях неполной информации, существенное внимание уделяют рынку олигополии. Теория игр стала первым научным методом анализа олигополии [1]. С обзором новейших достижений в теории игр олигополии можно ознакомиться в [2].

Модели теории коллективного поведения дополняют модели теории игр тем, что предоставляют возможность исследования динамики поведения рациональных агентов при достаточно слабых предположениях об их информированности [3, 4]. Динамический процесс принятия агентом решений строится на основе рефлексивных размышлений о наилучшем собственном выборе, с учетом наилучших откликов остальных конкурентов. Развитие динамики направляется выбором агентов. Определяющим эффектом рефлексии является достижение равновесия [4, 5].

Значительное число исследований моделей теории игр и коллективного поведения на конкурентных рынках [6–16] и др. посвящено проблеме выявления условий существования равновесия, его единственности и сходимости к нему траекторий агентов.

Приняв ту или иную гипотезу о поведении агентов и их взаимодействии, можно детально рассчитать траекторию каждого из них. Однако агрегированное описание поведения системы в целом, не вдаваясь в подробное описание поведения каждого из агентов, представляется целесообразнее такого метода по ряду обстоятельств. Так понятно, что активность отдельных агентов в отдельные моменты времени не может оказывать сколько-нибудь заметного влияния на сходимость траекторий. К тому же рост числа агентов на рынке и их траекторий, времени на получение результата делают метод все менее привлекательным. В ряде случаев об асимптотической сходимости рассчитанных траекторий можно судить лишь через значительный промежуток времени, в частности, когда процесс развивается неоднозначно или медленно, и тенденция проявляется поздно. Интуитивно агрегированное описание коллективного поведения системы агентов на значительных временных промежутках может быть не менее точным, чем детализированное.

2. Формальная постановка задачи исследования

В качестве базовой рассматривается модель олигополии Курно [1], которая состоит из n конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов. Считается, что спрос определен функцией вида (обратной функцией спроса в зависимости от совокупного выпуска агентов):

$$p(Q) = a - bQ, \tag{1}$$

где $p(Q)$ – единая рыночная цена, $Q = \sum_{i \in N} q_i$ – совокупный выпуск n агентов $i \in N = \{1, \dots, n\}$, q_i – выпуск i-го агента, a и b – параметры. Параметр a характеризует максимально возможную цену товара, при которой объем спроса будет стремиться к нулю, а параметр b характеризует наклон кривой спроса.

Полные издержки агентов имеют вид

$$\phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \tag{2}$$

где c_i, d_i – предельные и постоянные издержки i-го агента соответственно. Целевые функции агентов заданы выражением

$$\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \to \max_{q_i}. \tag{3}$$

Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют. Состояние рынка в момент времени t $(t = 0, 1, 2, \dots)$ задается n-мерным вектором $q^t = (q_1^t, \dots, q_i^t, \dots, q_n^t)$.

Агенты считаются в совокупности конкурентоспособными на рынке Курно, если для каждого агента выполняется ограничение на его предельные издержки

$$c_i < \frac{a + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} c_j}{n}. \tag{4}$$

В этом случае каждый агент считается конкурентоспособным, а в модели олигополии Курно, как в игре в нормальной форме, равновесие $q^* = (q_1^*, \ldots, q_i^*, \ldots, q_n^*)$ понимаемое как статическое равновесие Нэша [17], существует, единственно и $q_i^* > 0 \ \forall i \in N$ (см., например, [18]).

В условиях игровой неопределенности (о действиях, выбираемых конкурентным окружением) и неполного знания (о затратах, целевых функциях и прочих атрибутах конкурентов) равновесие рынка, как правило, может быть достигнуто не в результате однократного принятия агентами решений, а как исход итерационного рефлексивного процесса [3, 4, 18–20].

Будем рассматривать рефлексивный дискретный процесс, когда смена состояний рынка удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [4] – в каждый момент (период, такт) времени $(t+1)$ каждый агент наблюдает объемы выпуска всех агентов, выбранные ими в предыдущий момент времени t и корректирует свой выпуск, делая шаг в направлении текущего положения цели $x_i(q_{-i}^t)$ согласно следующей итерационной процедуре:

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), \quad i \in N. \tag{5}$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0, 1]$ – параметр, независимо выбираемый каждым i-м агентом, определяет величину его шага к текущему положению своей цели. Агент может делать полный шаг, полагая $\gamma_i^{t+1} = 1$, тем самым выбирая свой наилучший ответ, «оставаться на месте», выбирая $\gamma_i^{t+1} = 0$, или делать «неполный шаг», если $\gamma_i^{t+1} \in (0, 1)$.

Текущее положение цели i-го агента $x_i(q_{-i}^t)$ – это такой его объем выпуска, который максимизировал бы собственную целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же объемы выпуска, что и в предыдущий [4, 21]. Здесь $q_{-i}^t = (q_1^t, \ldots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \ldots, q_n^t)$ – обстановка i-го агента (вектор объемов выпуска всех агентов в момент времени t за исключением i-го агента). Известно, что (см., например, [10, 18])

$$x_i(q_{-i}^t) = \frac{h_i - \sum\limits_{j \neq i} q_j^t}{2} = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}. \tag{6}$$

Здесь:

$h_i = \frac{a - c_i}{b}$ – объем совершенно конкурентного рынка при ценообразовании по предельным издержкам $p(Q) = c_i$, называемый «совершенно конкурентный объем фирмы i»;

$Q_{-i}^t = \sum\limits_{j \neq i} q_j^t$ – суммарный выпуск «окружением» i-го агента $(i, j \in N)$.

Приведем вывод переменной $x_i(q_{-i}^t)$, чтобы показать ее соотношение с q_i^t. Используя (1)–(3) для t-го момента времени получаем

$$\frac{\partial \prod_i^t}{\partial q_i^t} = a - bq_i^t - bQ_{-i}^t + \left(-b - b\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}\right) q_i^t - c_i = 0$$

и

$$q_i^t = \frac{(a - c_i)/b - Q_{-i}^t}{2 + \partial Q_{-i}^t / \partial q_i^t}.$$

По предположению Курно выпуск окружения агента не изменится, если он изменит свой выпуск. Поэтому $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = 0$ и оптимальный выпуск агента q_i^t составит $\frac{(a-c_i)/b - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j^t}{2}$. Этот оптимальный выпуск будет являться текущим положением цели агента $x_i(q_{-i}^t)$ в (6).

Для модели (5)–(6) под траекторией i-го агента понимается *реализованная* по этой модели последовательность объемов выпуска $q_i^0, q_i^1, \ldots, q_i^t, \ldots$.

Проблеме выявления условий сходимости к равновесию траекторий агентов, определяемых по (5)–(6), и ее модификациям в классической модели олигополии Курно (1)–(4) посвящено значительное число работ [18–20, 22–26] и др.

Особенность и новизна проведенного здесь исследования заключается в разработке агрегированного описания поведения системы в целом, позволяющего судить о движении к положению равновесия траектории каждого из агентов.

Проводимое исследование предполагает последовательное решение следующих задач:

1) приведение моделей агентов к однородному виду (форме);

2) исследование влияния суммарных невязок на сходимость траекторий агентов;

3) агрегированное описание преобразования (пересчета) суммарных невязок при переходе из периода в период;

4) агрегированное описание динамики (оценка) суммарных невязок по совокупности временных периодов;

5) формирование условий сходимости к равновесию траекторий агентов с использованием агрегированной оценки динамики модели коллективного поведения.

Интуитивно понятно, что агрегаты предпочтительнее формировать из однородных элементов. В идеальном случае однородные агенты могут различаться лишь их выбором параметра γ. Исследуем возможность такого случая для модели рынка (1)–(4) и процесса (5)–(6).

С этой задачи начнем следующий раздел.

3. Методы и результаты исследования

Пусть процесс (5)–(6) для модели (1)–(4) сходится при наборах параметров шагов $\{\gamma_i^{t+1}\}$ $(i \in N; t = 0, 1, 2, \ldots)$ и предельных издержках агентов $c = (c_1, \ldots, c_i, \ldots c_n)$.

Будет ли при тех же параметрах шагов сходиться этот процесс, если меняются предельные издержки агентов или параметры рынка?

С целью ответа на этот вопрос введем следующую замену переменных:

$$\varepsilon_i^t = q_i^* - q_i^t \quad (i \in N; t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Здесь q_i^* – равновесный, q_i^t – текущий выпуск i-го агента.

Используя известные для равновесия Курно соотношения $h_i = Q^* + q_i^*$, преобразуем (5)–(6). Имеем

$$\begin{aligned} q_i^* - q_i^{t+1} &= q_i^* - q_i^t - \gamma_i^{t+1}\left(\frac{h_i - Q_{-i}^t}{2} - q_i^t\right) = \\ &= q_i^* - q_i^t - \gamma_i^{t+1}\left(\frac{Q^* + q_i^* - Q_{-i}^t}{2} - q_i^t\right) = \\ &= q_i^* - q_i^t - \gamma_i^{t+1}\left(\frac{\sum\limits_{j\neq i}(q_j^* - q_j^t) + 2q_i^*}{2} - q_i^t\right). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\varepsilon_i^{t+1} = \varepsilon_i^t + \gamma_i^{t+1}\left(-\frac{\sum\limits_{j\neq i}\varepsilon_j^t}{2} - \varepsilon_i^t\right). \tag{8}$$

Здесь, по аналогии с (1)–(6), текущее положение цели i-го агента равно $\left(-\frac{\sum_{j\neq i}\varepsilon_j^t}{2}\right)$, а (8) является моделью индикаторного поведения агента, если его целевая функция имеет вид

$$\Pi_i(\varepsilon) = -\left(\sum_{j\in N}\varepsilon_j\right)\varepsilon_i \to \max_{\varepsilon_i}. \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n)$.

Покажем это. По (9) для t-го момента времени находим оптимальные невязки i-го агента. Имеем

$$\frac{\partial \prod_i^t}{\partial \varepsilon_i^t} = -\varepsilon_i^t - \sum_{j\in N\setminus\{i\}}\varepsilon_j^t - \left(1 + \frac{\partial \sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}}\varepsilon_j^t}{\partial \varepsilon_i^t}\right)\varepsilon_i^t.$$

Отсюда

$$\varepsilon_i^t = -\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\varepsilon_j^t \Bigg/ \left(2 + \frac{\partial \sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}}\varepsilon_j^t}{\partial \varepsilon_i^t}\right).$$

По предположению Курно окружение агента не изменит свой выпуск, если он сам сделает это. Очевидно, что это предположение относится и к невязкам. Поэтому $\frac{\partial \sum_{j\in N\setminus\{i\}} \varepsilon_j^t}{\partial \varepsilon_i^t} = 0$ и его положение цели (оптимальные невязки на текущий момент времени) составит $\left(-\frac{\sum_{j\in N\setminus\{i\}} \varepsilon_j^t}{2}\right)$.

Для модели (8) под траекторией i-го агента будем понимать реализованную по этой модели последовательность невязок $\varepsilon_i^0, \varepsilon_i^1, \ldots, \varepsilon_i^t, \ldots$.

Сходимость (8) означает, что $\varepsilon_i^t \to \varepsilon_i^* = 0$ при $t \to \infty$.

Утверждение 1. *Процесс индикаторного поведения* (8) *сходится тогда и только тогда, когда сходится процесс* (5)–(6) *для модели* (1)–(4).

Доказательство этого утверждения приведено в Приложении.

Следующее утверждение показывает, что для сходимости траектории невязок каждого из агентов достаточно сходимости траектории суммарных невязок всех агентов.

Утверждение 2. *Если* $\sum_{j\in N} \varepsilon_j^t \to 0$ *при* $t \to \infty$, *то* $\varepsilon_j^t \to \varepsilon_j^* = 0\ \forall j \in N$.

Доказательство этого утверждения, основанное на методе математической индукции, приведено в Приложении.

Примечание. Из равенства $\sum_{j\in N} \varepsilon_j^t = 0$ по (8) следуют равенства $|\varepsilon_j^{t+1}| = (1 - \gamma_j^{t+1}/2)|\varepsilon_j^t|$ и неравенства $|\varepsilon_j^{t+1}| < |\varepsilon_j^t|$ при $\gamma_j^{t+1} \neq 0\ \forall j \in N$, которые указывают на то, что в этом случае траектории всех агентов в $(t+1)$-м периоде будут ближе к положению равновесия, чем в t-м периоде.

Итоговый результат для модели (1)–(6), по сути являющийся следствием утверждения 1, представлен в следующей теореме.

Теорема 1. *В линейной модели Курно* (1)–(4) *с конкурентоспособными агентами параметры рынка a и b, параметры агентов c_i и d_i не влияют на условия на величины шагов $\{\gamma_i^t\}_{t=1,2,\ldots}$, обеспечивающие сходимость модели индикаторного поведения* (5)–(6).

Отметим преимущества в исследовании проблемы достижения равновесия на основе модели (8):

– модель безразлична к параметрам рынка и затрат агентов (a, b, c_i, d_i), что дает возможность упростить исследование;

– агенты и их траектории различаются лишь выбором параметра γ и начальными данными. При этом значение имеет только первое, так как интересуют условия сходимости при любых начальных данных;

– с точки зрения экономических ограничений могут предъявляться требования к неотрицательности текущих выпусков агентов в модели (5)–(6). В модели (8) для подобных требований к невязкам нет оснований.

Перейдем к следующей задаче, которая, согласно утверждению 2, имеет важное значение для сходимости траектории каждого из агентов. Обсудим условия на параметры γ, при которых $\sum_{j\in N} \varepsilon_j^t \to 0$.

По (8) имеем, что $\sum\limits_{j\in N}\varepsilon_j^{t+1}=\left(1-\sum\limits_{j\in N}\gamma_j^{t+1}/2\right)\sum\limits_{j\in N}\varepsilon_j^{t+1}-\sum\limits_{j\in N}\varepsilon_j^t\gamma_j^{t+1}/2.$

При $\gamma_j^{t+1}\equiv 1\ \ \forall j\in N$ имеем $\sum\limits_{j\in N}\varepsilon_j^{t+1}=(1-(1+n)/2)\sum\limits_{j\in N}\varepsilon_j^{t+1}.$

При $\gamma_j^{t+1}\equiv 0\ \ \forall j\in N$ будет, что $\sum\limits_{j\in N}\varepsilon_j^{t+1}=\sum\limits_{j\in N}\varepsilon_j^{t}.$

Таким образом, если $\sum_{j\in N}\varepsilon_j^t\neq 0$, то существует такое значение параметра $\tilde{\gamma}^{t+1}$, что

$$\sum_{j\in N}\varepsilon_j^{t+1}=(1-\tilde{\gamma}^{t+1}(1+n)/2)\sum_{j\in N}\varepsilon_j^{t}. \tag{10}$$

При этом значение параметра $\tilde{\gamma}^{t+1}$ определяется из соотношения

$$\tilde{\gamma}^{t+1}=\left(\sum_{j\in N}\gamma_j^{t+1}+\sum_{j\in N}\gamma_j^{t+1}\varepsilon_j^t/\sum_{j\in N}\varepsilon_j^t\right)/\left(1+n\right). \tag{11}$$

Здесь $\tilde{\gamma}^{t+1}$ *является средним арифметическим взвешенным* набора параметров $\{\gamma_j^{t+1}\}_{j\in N}$ с весами $\{\omega_j^t\}_{j\in N}$, т.е. $\tilde{\gamma}^{t+1}=\frac{\sum_{j\in N}\omega_j^t\gamma_j^{t+1}}{\sum_{j\in N}\omega_j^t}$ и веса являются вещественными числами вида $\omega_i^t=\sum_{j\in N}\varepsilon_j^t+\varepsilon_i^t$.

«Отрицательный» вклад агента в параметр $\tilde{\gamma}^{t+1}$ возможен в тех случаях, если знак его невязок не совпадает со знаком совокупных невязок всех агентов $\sum_{j\in N}\varepsilon_j^t=Q^*-Q^t$.

Фиксируем некоторые периоды времени t_0,τ и $\tau>t_0$. Далее, полагая, что $\sum_{j\in N}\varepsilon_j^{t_0}\neq 0$ и $\tilde{\gamma}^t\neq\frac{2}{1+n}$ (случаи, когда $\tilde{\gamma}^t=\frac{2}{1+n}$ и соответственно $\sum_{j\in N}\varepsilon_j^t=0$, учтены в примечании к утверждению 2), при $t_0+1\leqslant t\leqslant\tau$ по (10) последовательно получаем

$$\sum_{j\in N}\varepsilon_j^{t_0+\tau}=\sum_{j\in N}\varepsilon_j^{t_0}\prod_{t=t_0+1}^{\tau}(1-\tilde{\gamma}^t(1+n)/2). \tag{12}$$

Введем обозначения:

$$T=\{t_0+1,\ldots,\tau\},\quad T_+=\{t\in T|1-\tilde{\gamma}^t(1+n)/2>0\},$$
$$T_-=\{t\in T|1-\tilde{\gamma}^t(1+n)/2<0\}.$$

В отдельные периоды из множества T_+ могут иметь место два случая возможных неравенств: $1\leqslant 1-\tilde{\gamma}^t(1+n)/2$ (если $\tilde{\gamma}^t\leqslant 0$) и $0<\tilde{\gamma}^t(1+n)/2<1$ (если $0<\tilde{\gamma}^t<\frac{2}{1+n}$). Первый случай является «неблагоприятным», а второй «благоприятным» для сходимости процесса. Аналогично, в множестве T_- также возможны «благоприятные» периоды, когда $-1<1-\tilde{\gamma}^t(1+n)/2<0$ (если $\frac{2}{1+n}<\tilde{\gamma}^t<\frac{4}{1+n}$), и «неблагоприятные» периоды, когда $1-\tilde{\gamma}^t(1+n)/2<-1$ (если $\frac{4}{1+n}\leqslant\tilde{\gamma}^t$).

Используя неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем:

$$\prod_{t\in T_+}(1-\tilde{\gamma}^t(1+n)/2) \leqslant \left[\frac{1}{t_+}\sum_{t\in T_+}(1-\tilde{\gamma}^t(1+n)/2)\right]^{t_+} = \left[1-\bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau}(1+n)/2\right]^{t_+},$$

$$\prod_{t\in T_-}(\tilde{\gamma}^t(1+n)/2-1) \leqslant \left[\frac{1}{t_-}\sum_{t\in T_-}(\tilde{\gamma}^t(1+n)/2-1)\right]^{t_-} = \left[\bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau}(1+n)/2-1\right]^{t_-}.$$

Здесь: $\bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau} = \frac{1}{t_+}\sum_{t\in T_+}\tilde{\gamma}^t, \bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau} = \frac{1}{t_-}\sum_{t\in T_-}\tilde{\gamma}^t$ – средние значения взвешенного параметра $\tilde{\gamma}^t$ по множествам T_+ и T_- соответственно; $t_+(t_-)$ – число периодов в множестве $T_+(T_-), \tau = t_+ + t_-$.

Отсюда по (12) получаем, что

$$\left|\sum_{j\in N}\varepsilon_j^{t_0+\tau}\right| \leqslant \left[1-\bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau}(1+n)/2\right]^{t_+}\left|1-\bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau}(1+n)/2\right|^{t_-}\left|\sum_{j\in N}\varepsilon_j^{t_0}\right|. \tag{13}$$

Неравенство (13) и утверждение 2 позволяют сформулировать следующее утверждение о сходимости процесса (8).

Утверждение 3. Модель (8) *сходится к положению равновесия, если для произвольного* t_0 *и* $\tau > t_0$ *выражение* $\left[1-\bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau}(1+n)/2\right]^{t_+}\left|1-\bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau}(1+n)/2\right|^{t_-}$ $(\tau = t_+ + t_-)$ *стремится к нулю при* $\tau\to\infty$.

Следствие 1. Если $\exists t_0$ *такое что* $0 < \bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau}$ *и* $\bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau} < \frac{4}{n+1}$ $\forall\tau > t_0$, *то модель* (8) *сходится к равновесию.*

Поясним справедливость этого следствия. Если $t\in T_+$, то всегда $\tilde{\gamma}^t < \frac{2}{1+n}$ и $\bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau} < \frac{2}{1+n}$. Если $t\in T_-$, то всегда $\tilde{\gamma}^t > \frac{2}{1+n}$ и поэтому $\bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau} > \frac{2}{1+n}$. Поэтому, чтобы выполнялись неравенства $\left[1-\bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau}(1+n)/2\right] < 1$ и $\left|1-\bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau}(1+n)/2\right| < 1$, достаточно потребовать, чтобы $0 < \bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau}$ и $\bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau} < \frac{4}{1+n}$.

Также из утверждений 1 и 3 следует, что для тех наборов параметров $\{\gamma_i^t\}$, для осредненных оценок которых выполняются неравенства $0 < \bar{\tilde{\gamma}}_+^{\tau}$ и $\bar{\tilde{\gamma}}_-^{\tau} < \frac{4}{1+n}$, сходится модель (5)–(6).

Следствие 2. Пусть параметры $\tilde{\gamma}^t$ $t = (1,2,\ldots,\tau)$ *– случайные величины, и* $\bar{\tilde{\gamma}}^{\tau} = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\tilde{\gamma}^t$ *по вероятности сходится к общему среднему* $\bar{\tilde{\gamma}}$. *Тогда модель* (8) *по вероятности сходится к равновесию при* $\tau\to\infty$, *если* $\bar{\tilde{\gamma}} < \frac{4}{1+n}$.

Пример фрагмента численного расчета. Положим в модели (1)–(3) $n = 4$, $a = 100$, $b = 0{,}1$, $c = (20;25;20;30)$, $q^0 = (250;250;100;200)$. Постоянные издержки для всех агентов равны и составляют 500. По формуле $h_i = \frac{a-c_i}{b}$ имеем, что $h = (800;750;800;700)$.

При полной информированности агентов статичное равновесие Нэша q^* является решением системы линейных алгебраических уравнений вида $q_i + Q = h_i$ $(i = \overline{1,4})$. Имеем, что $q_i^* = h_i - \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{4}h_j$ и $q^* = (190;140;190;90)$.

Фрагмент динамики при $n = 4$

Такты	Невязки действий агентов				Параметры шагов							
t	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	$\sum \varepsilon_j$	$\tilde{\gamma}$	$\bar{\tilde{\gamma}}_+$	$\bar{\tilde{\gamma}}_-$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	−60,0	−110,0	90,0	−110,0					−190,0			
1	−10,0	−65,0	105,0	−72,5	0,40	0,30	0,30	0,25	−42,5	0,31	0,31	
2	0,5	−48,9	95,6	−61,0	0,40	0,30	0,30	0,20	−13,8	0,27	0,29	
3	3,2	−39,5	62,9	−51,7	0,40	0,30	0,80	0,25	−25,1	−0,33	0,08	
4	7,5	−29,8	57,2	−42,1	0,40	0,30	0,30	0, 25	−7,1	0,29	0,13	
5	7,5	−22,4	39,7	−35,9	0,40	0,40	0,70	0, 25	−11,2	−0,23	0,06	
6	8,2	−15,7	35,4	−30,0	0,40	0,40	0,30	0, 25	−2,1	0,32	0,11	
7	6,1	−13,0	30,4	−26,0	0,70	0,30	0,30	0, 25	−2,5	−0,08	0,08	
8	5,4	−9,9	26,2	−22,4	0,40	0,40	0,30	0, 25	−0,7	0,28	0,10	
9	5,1	−8,3	22,4	−19,5	0,10	0,30	0,30	0, 25	−0,3	0,24	0,12	
10	4,7	−7,0	19,1	−17,1	0,20	0,30	0,30	0,25	−0,3	−0,03	0,10	
11	3,4	−3,3	14,4	−10,1	0,60	1,00	0,50	0,80	4,3	5,61		5,61
12	−0,5	−3,8	5,0	−7,2	1,00	1,00	1,00	1,00	−6,5	1,00		3,31
13	3,0	1,3	5,4	−0,4	1,00	1,00	0,50	1,00	9,3	0,98		2,53
14	−3,2	−4,0	−2,0	−4,9	1,00	1,00	1,00	1,00	−14,0	1,00		2,15
15	5,4	5,0	6,0	4,6	1,00	1,00	1,00	1,00	21,0	1,00		1,92
16	−7,8	−8,0	−7,5	−8,2	1,00	1,00	1,00	1,00	−31,5	1,00		1,77
17	11,9	11,8	12,0	11,7	1,00	1,00	1,00	1,00	47,3	1,00		1,66
18	−17,7	−17,8	−17,6	−17,8	1,00	1,00	1,00	1,00	−71,0	1,00		1,57
19	26,6	26,6	26,7	26,6	1,00	1,00	1,00	1,00	106,5	1,00		1,51
20	−39,9	−6,7	−26,6	−39,9	1,00	0,50	0,80	1,00	−113,1	0,82		1,44
21	36,6	23,3	8,3	36,6	1,00	0,50	0,50	1,00	104,8	0,77		0,77
22	−34,1	−8,7	−19,9	−34,1	1,00	0,50	0,50	1,00	−96,9	0,77		0,77
23	31,4	17,7	9,3	31,4	1,00	0,50	0,50	1,00	89,7	0,77		0,77
24	−11,0	−9,2	−15,5	−29,2	0,70	0,50	0,50	1,00	−64,8	0,69		0,75
25	26,9	9,3	4,6	−5,7	1,00	0,50	0,50	0,50	35,2	0,62		0,72
26	−4,1	−1,8	−5,3	−20,4	1,00	0,50	0,50	1,00	−31,7	0,76		0,73
27	13,8	6,6	3,9	5,6	1,00	0,50	0,50	1,00	29,9	0,78		0,74
28	5,0	−2,5	−4,5	−12,1	0,40	0,50	0,50	1,00	−14,2	0,59		0,72
29	9,6	1,6	0,1	1,0	1,00	0,50	0,50	1,00	12,4	0,75		0,72
30	−1,4	−1,9	−3,0	−5,7	1,00	0,50	0,50	1,00	−12,0	0,79		0,73

Примечание: обозначения показателей в шапке таблицы даны без индекса «t», предполагая под этим индексом номер такта (периода, итерации).

Переход к модели (8) осуществляется, используя формулу расчета невязок $\varepsilon_i^t = q_i^* - q_i^t$. Имеем $\varepsilon^0 = (-60; -110; 90; -110)$.

По текущим значениям невязок ε_i^t (столбцы 2–5 таблицы) и текущим значениям параметров γ_i^t (столбцы 6–9 таблицы), по формулам (8) и (11) по каждому такту (столбец 1) приведены расчеты *средних арифметических взвешенных* $\tilde{\gamma}^t$ наборов параметров $\{\gamma_j^t\}$ (столбец 11).

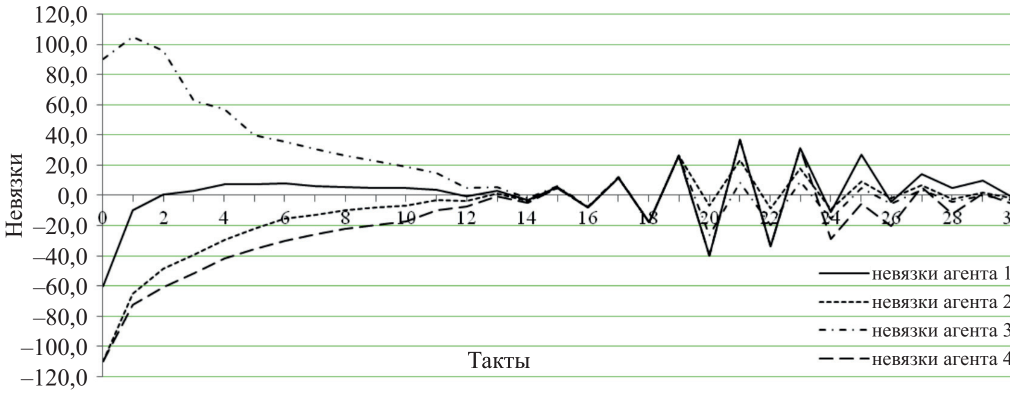

Рис. 1. Динамика невязок действий отдельных агентов.

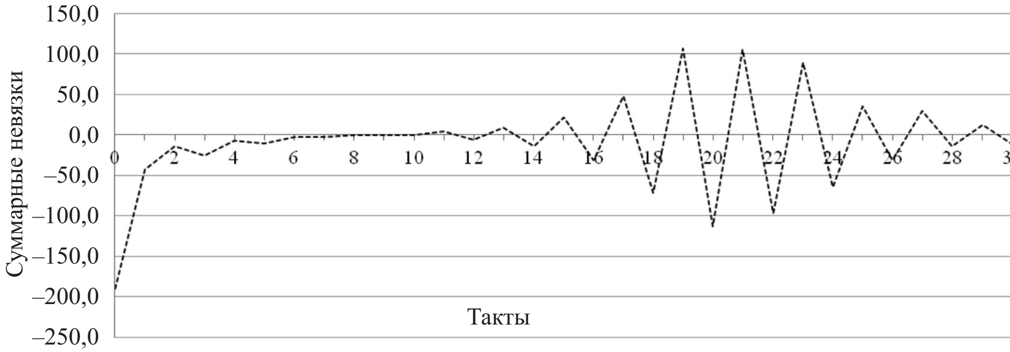

Рис. 2. Динамика суммарных невязок.

Сходимость процесса зависит от того, какие шаги γ выбирают агенты. Известно, что если агенты делают максимальные (равные единице) шаги γ, то процесс сходится только при $n = 2$. При $n = 4$ процесс расходится, если все агенты делают шаги, превышающие 0,8. В общем случае при $n = 4$ вопрос о сходимости остается открытым, если агенты действуют разнонаправлено: одни выбирают шаги больше 0,8, другие меньше.

Для большей наглядности введенных авторами статьи условий, как средства для индикации сходимости процесса, выделено три промежутка по десять тактов в каждом. В первых десяти тактах агенты намеренно делают небольшие шаги, чтобы гарантировать сходимость. В следующих десяти тактах делают большие шаги, чтобы показать расходимость процесса. В заключительные десять тактов процесс опять сделан сходящимся за счет того, что не все агенты делают большие шаги.

Рассмотрим подробнее динамику процесса. В каждом из первых десяти тактов динамики средние взвешенные $\tilde{\gamma}^t$ не превосходят $2/(1+n) = 0{,}4$ (есть и два отрицательных значения), а агрегированная оценка $\bar{\tilde{\gamma}}_+^\tau$ (их *среднее арифметическое* за t тактов – см. столбец 12) находится в диапазоне $(0; 0{,}4)$. Поэтому имеет место тенденция к уменьшению суммарных невязок по абсолютной величине: было $\varepsilon^0 = (-60; -110; 90; -110)$ и $\left|\sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^0\right| = 190$, стало в десятом такте $\varepsilon^{10} = (4{,}7; -7{,}0; 19{,}1; -17{,}1)$ и $\left|\sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^{10}\right| = 0{,}3$.

Следующие десять тактов (с одиннадцатого по двадцатый) $\tilde{\gamma}^t$ и агрегированная оценка динамики $\bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau$ (столбец 13) превосходят $4/(1+n) = 0{,}8$ что обуславливает тенденцию к увеличению по абсолютной величине суммарных невязок. Стало $\varepsilon^{20} = (-39{,}9; -6{,}7; -26{,}6; -39{,}9)$ и $\left|\sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^{20}\right| = 113{,}1$.

С двадцать первого по тридцатый такты средние *арифметические взвешенные* $\tilde{\gamma}^t$ и их *среднее арифметическое* $\bar{\tilde{\gamma}}_-^\tau$ находятся в диапазоне $(0{,}4; 0{,}8)$, что означает выполнение условий сходимости по утверждению 3 и его следствию 1 при $t_0 = 21$, и обуславливает тенденцию к уменьшению суммарных невязок. Действительно, стало $\varepsilon^{30} = (-1{,}4; -1{,}9; -3{,}0; -5{,}7)$ и $\left|\sum_{j=1}^4 \varepsilon_j^{30}\right| = 12{,}0$.

Имеем также $\bar{\tilde{\gamma}}^{30} = \frac{1}{30}\sum_{t=1}^{30} \tilde{\gamma}^t = 0{,}76$. По данным таблицы динамика движется к теоретическому статичному равновесия Нэша.

На рис. 1 и рис. 2 наглядно видна «синхронизация» динамик частных и суммарных издержек. Очевидно, если сходятся невязки каждого из агентов, то сходятся их суммарные невязки. Но из утверждения 2 следует и обратное: из сходимости к нулю суммарных невязок следует сходимость к нулю невязок каждого из агентов.

4. Заключение

Особенность и новизна проведенного здесь исследования проблемы выявления условий сходимости к равновесию моделей коллективного поведения состоит в следующем. Традиционно, такие условия формулируются в виде диапазонов на значения параметров γ для каждого из агентов в каждом периоде: если каждый агент в каждом периоде выбирает свой параметр в таком диапазоне, то динамика гарантированно сходится. Здесь же условия сходимости формулируются по совокупности периодов (т.е. за временной промежуток) в виде диапазона на *среднее арифметическое значение параметров*, которые представляют собой *средние арифметические взвешенные* набора $\{\gamma_j^t\}_{j\in N}$ по каждому периоду t входящим в совокупность. Если среднее по совокупности периодов входит в диапазон, то динамика каждого из агентов приближается к положению равновесия. Если при этом совокупность периодов неограниченна, то динамика каждого из агентов гарантированно сходится к равновесию.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Вначале отметим, что статическое равновесие Нэша в модели (9) существует, единственно и $\varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$.

Справедливость утверждения 1 следует из того факта, что один процесс получается из другого преобразованием на основе невязок в качестве замены переменных. Поэтому из сходимости процесса (5)–(6) сходимость (8) следует непосредственно.

Покажем также, основываясь на методе математической индукции, что из сходимости процесса (8) следует сходимость процесса (5)–(6).

Пусть ε^0 – вектор начальных условий процесса (8), при которых он сходится. Определим вектор начальных условий процесса (5)–(6) как $q^0 = q^* - \varepsilon^0$. Рассчитаем ε^1 по (8). С учетом $h_i = Q^* + q_i^*$ и (6) покажем, что $q^1 = q^* - \varepsilon^1$. Имеем:

$$q_i^* - \varepsilon_i^1 = q_i^* - \varepsilon_i^0 - \gamma_i^1 \left(-\frac{\sum_{j \neq i} \varepsilon_j^0}{2} - \varepsilon_i^0 \right) =$$

$$= q_i^0 - \gamma_i^1 \left(-\frac{\sum_{j \neq i} (q_j^* - q_j^0)}{2} - (q_i^* - q_i^0) \right) =$$

$$= q_i^0 + \gamma_i^1 \left(\frac{2q_i^* + \sum_{j \neq i} (q_j^* - q_j^0)}{2} - q_i^0 \right) =$$

$$= q_i^0 + \gamma_i^1 \left(\frac{Q^* + q_i^* - \sum_{j \neq i} q_j^0}{2} - q_i^0 \right) =$$

$$= q_i^0 + \gamma_i^1 \left(\frac{h_i - \sum_{j \neq i} q_j^0}{2} - q_i^0 \right) = q_i^0 + \gamma_i^1 (x_i(q_{-i}^0) - q_i^0) = q_i^1.$$

Аналогично показывается, что из $q^t = q^* - \varepsilon^t$ следует $q^{t+1} = q^* - \varepsilon^{t+1}$, если ε^{t+1} рассчитывается по (8). Поэтому, если $\varepsilon^t \to 0$, то $q^t \to q^*$.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Пусть $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \to 0$. Тогда $\forall \delta > 0\ \exists t'$, что при $t > t'$ будет выполняться $\left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \right| < \delta$.

Положим $t = t' + 1$. Тогда по (8):

$$\left| \varepsilon_i^{t+1} \right| \leqslant (1 - \gamma_i^{t+1}/2) \left| \varepsilon_i^t \right| + \gamma_i^{t+1}/2 \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \right| <$$
$$< (1 - \gamma_i^{t+1}/2) \left| \varepsilon_i^t \right| + \delta \gamma_i^{t+1}/2 < (1 - \gamma_i^{t+1}/2) \left| \varepsilon_i^t \right| + \delta.$$

Опять по (8), используя предыдущее неравенство, имеем:

$$\left| \varepsilon_i^{t+2} \right| \leqslant (1 - \gamma_i^{t+2}/2) \left| \varepsilon_i^{t+1} \right| + \gamma_i^{t+2}/2 \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} \right| <$$
$$< (1 - \gamma_i^{t+2}/2) \left| \varepsilon_i^{t+1} \right| + \delta \gamma_i^{t+2}/2 <$$
$$< (1 - \gamma_i^{t+2}/2)(1 - \gamma_i^{t+1}/2) \left| \varepsilon_i^t \right| + \left[(1 - \gamma_i^{t+2}/2) + \gamma_i^{t+2}/2 \right] \delta <$$
$$< (1 - \gamma_i^{t+2}/2)(1 - \gamma_i^{t+1}/2) \left| \varepsilon_i^t \right| + \delta.$$

Следуя методу математической индукции, предположим, что в некоторый $(t+m)$-й период имеет место неравенство

$$\left|\varepsilon_i^{t+m}\right| < \left|\varepsilon_i^{t}\right| \times \prod_{l=1}^{m}(1-\gamma_i^{t+l}/2) + \delta.$$

По (8) с учетом последнего неравенства:

$$\begin{gathered}\left|\varepsilon_i^{t+m+1}\right| \leqslant (1-\gamma_i^{t+m+1}/2)\left|\varepsilon_i^{t+m}\right| + \gamma_i^{t+m+1}/2\left|\sum_{j\in N}\varepsilon_j^{t+m}\right| < \\ < (1-\gamma_i^{t+m+1}/2)\left|\varepsilon_i^{t+m}\right| + \delta\gamma_i^{t+m+1}/2 < \\ < (1-\gamma_i^{t+m+1}/2)\left[\left|\varepsilon_i^{t}\right| \times \prod_{l=1}^{m}(1-\gamma_i^{t+l}/2) + \delta\right] + \delta\gamma_i^{t+m+1} = \\ = \left|\varepsilon_i^{t}\right| \times \prod_{l=1}^{m+1}(1-\gamma_i^{t+l}/2) + \delta.\end{gathered}$$

То есть такое же неравенство имеет место и для $(t+m+1)$-го периода.

В полученных для каждого периода неравенствах первое слагаемое стремится к нулю при $m \to \infty$ и $\gamma \neq 0$, а число δ может быть сколь угодно малым, что указывает на справедливость доказываемого утверждения.

Утверждение 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
2. *Гераськин М.И.* Обзор новейших достижений в теории игр олигополии // АиТ. 2023. № 6. С. 3–25.
   Geraskin M.I. A Survey of the Latest Advances in Oligopoly Games // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 6. P. 565–578.
3. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
4. *Опойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
5. *Гераськин М.И.* Рефлексивный анализ равновесий в игре триополии при линейных функциях издержек агентов // АиТ. 2022. № 3. С. 110–131.
   Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 389–406.
6. *Ougolnitsky G., Korolev A.* Game-Theoretic Models of Coopetition in Cournot Oligopoly // Stats. 2023. No. 6. P. 576–595. https://doi.org/10.3390/ stats602003
7. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий // АиТ. 2023. № 2. С. 150–168.

Ougolnitsky G.A, Usov A.B. The Interaction of Economic Agents in Cournot Duopoly Models under Ecological Conditions: A Comparison of Organizational Modes // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 2. P. 175–189.

8. *Fedyanin D.N.* Monotonicity of Equilibriums in Cournot Competition with Mixed Interactions of Agents and Epistemic Models of Uncertain Market // Procedia Comput. Sci. 2021. V. 186(3). P. 411–417.
9. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Влияние личностных качеств агентов на экзогенное формирование лидерства по Штакельбергу в модели коллективных действий // Экономика и математические методы. 2022. № 4. С. 113–122.
10. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // АиТ. 2022. № 3. С. 84–109.
    Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
11. *Askar S.* On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information // Appl. Math. Comput. 2021. V. 393(3). https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125823
12. *Anderson S.P., Erkal N., Piccinin D.* Aggregative games and oligopoly theory: short-run and long-run analysis // RAND J. Econom. 2020. V. 51. No. 2. P. 470–495.
13. *Wu R., Van Gorder R.A.* Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games // Appl. Math. Comput. 2018. V. 320. P. 240–250.
14. *Zewde A.B., Kassa S.M.* Multilevel Multi-Leader Multiple-Follower Games with Non-separable Objectives and Shared Constraints // Comput. Management Sci. 2021. V. 18(4). P. 455–475.
15. *Ueda M.* Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Appl. Math. Comput. 2019. V. 362. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.049.124535
16. *Long J., Huang H.* A Dynamic Stackelberg-Cournot Duopoly Model with Heterogeneous Strategies through One-Way Spillovers // Discret. Dynam. Natur. Soc. 2020. V. 2. P. 1–11.
17. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
18. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.
    Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 345–359.
19. *Корепанов В.О.* Модели рефлексивного группового поведения и управления // М.: ИПУ РАН, 2011. 127 с.
20. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in Mathematical Models of Decision-Making // Int. J. Parallel, Emergent Distributed Syst. 2018. V. 33. No. 3. P. 319–335.
21. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
22. *Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L.* Expectational Stability in Aggregative Games // J. Evolut. Econom. 2021. V. 31. No. 1. P. 235–249.
23. *Dzhabarova Y., Zlatanov B.A.* Note on the Market Equilibrium in Oligopoly with Three Industrial Players // AIP. Conf. Proc. 2022. 2449, 07001321.

24. *Peng Y., Xiao Y., Lu Q., Wu X., Zhao Y.* Chaotic Dynamics in Cournot Duopoly Model with Bounded Rationality Based on Relative Profit Delegation Maximization // Physica A: Statist. Mech. Appl. 2020. V. 560. 125174 p.

25. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Сходимость по норме динамики коллективного поведения в рефлексивной модели олигополии с лидерами // Информатика и автоматизация. 2023. Вып. 22(3). С. 616–646. https://doi.org/10.15622/ia.22.3.5

26. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий // Экономика и математические методы. 2020. № 4. С. 103–115.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 31.05.2024

После доработки 10.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024